

## 创建建筑物的 3D 虚拟模型

学习阶段： 3

学习范畴： 度量、图形与空间范畴

学习单位： 三角学  
探索与研究

目标： (i) 丰富学生在现实情境中应用三角学的经验  
(ii) 提升学生在建模中认出和作出假设的能力  
(iii) 运用数学软件创建建筑物的虚拟 3D 模型

先备知识： 运用三角学解与平面图形有关的应用题

教学资源： (i) 卷尺和数位量角器  
(ii) 配有 GeoGebra 或网路连线的桌上型电脑或平板电脑

### **跨学习领域的协作建议：**

这一系列活动将使用数位量角器的行动應用程式。或者，教师可以考虑与科技教育教师合作，他们的课堂可以指导学生使用 App Inventor 或 micro:bit 等方式创建自己的数位量角器。

### **背景资料：**

建筑物高度的估算是数学在建筑、工程和城市规划领域的重要应用。从建筑项目到城市发展规划，准确的高度估算至关重要。以下建模活动的主要目的是丰富学生对相似平面图形和三角比概念的理解和实际应用。

基于描述性的建模，这一系列活动引导学生透过测量收集数据，并创造现实世界中实物的虚拟 3D 模型。在资讯科技的帮助下，本资源套提供了测量的虚拟模拟。因此，这些活动也可以在课室环境中进行，不受天气的影响。在一系列活动中，学生不仅体验了估算建筑物高度的过程，还参与了从假设到局限性，以至估算和建模方法的环境限制等各个方面的讨论。

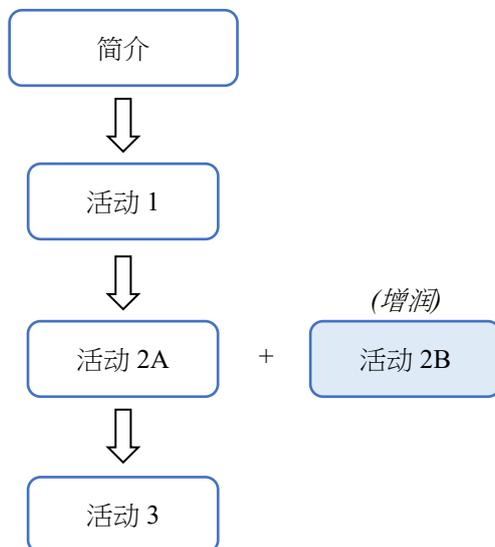
### **活动详情：**

这资源套件共有三个主要的活动：

- 活动 1：讨论一个估算高度的数学模型。

- 活动 2：在量度水平距离可行（2A）或不完全可行（2B）的情况下，运用三角比估算高度。
- 活动 3：创造建筑物的 3D 模型。

因应学生的能力和校情，教师可以考虑采用以下方法制定活动计划：



根据 Yong 等人（2015）的数学建模过程框架，下表总结了教师可以在相应问题中与学生讨论的元素。

阶段	元素	工作纸 1	工作纸 2A	工作纸 2B	工作纸 3
定义	定义感兴趣的问题	封面			
	确定变量和参数	2	3(b)	7(b)	
转化	确定支配原则	2	1, 2, 3(b)	6, 7(b)	
	作出简化假设	1(b), 3	3(a)	7(a)	4
	构建数学模型	2			3
分析	选择合适的数学工具 & 解决数学问题	1(a), 2, 4	1-4	5-7	1, 2
	确定或估计参数	2	3(b)	7(b)	
	验证解决方案				
解释	视像化解决方案		3	7	3
	得出适当的结论 & 传达结果	2	3	7	3

## 活动 1 (请参阅工作纸 1)

此活动的目的是通过讨论一个可能的数学模型，建立对高度估算的背景。

### 教学建议：

1. 教师可以透过讨论估算颁奖台的长度（问题 1(a)）和高度（问题 1(b)）的方法来引起学生的兴趣。这种学习经验将有助学生为后续活动做好准备。

问题 1(a) 提供了每个台阶是相同长度的资料。因此，颁奖台的总长度可以通过乘法来求出。

建议答案：

$$\begin{aligned}GH \\ &= 60 \text{ cm} \times 3 \\ &= 180 \text{ cm}\end{aligned}$$

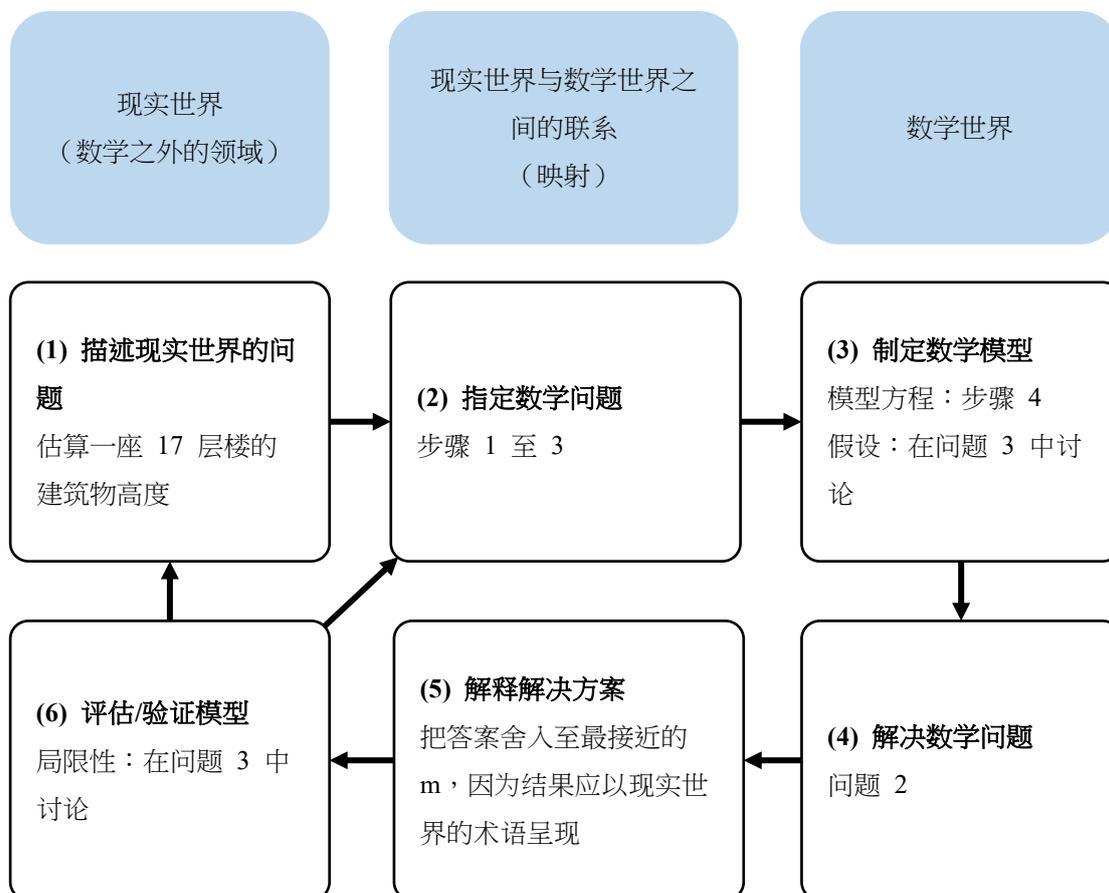
问题 1(b) 陈述一个把台阶的高度乘以台阶总数所得的估算。与问题 1(a) 不同，这里未有指明每个台阶的高度相等。因此，学生的任务是要识别在高度估算中的这个主要假设，并在小组中讨论这个假设是否合理。以下是一些可能的讨论结果。

- 学生假设每个台阶的高度相等（32 cm）。  
这个假设是合理的，因为它考虑到设计的一致性。在许多建筑结构中，楼梯通常被设计成具有相同的梯级高度。这种设计的一致性有助于确保安全和使用的便利性，因为人们在上下楼梯时通常期望梯级的高度是一致的。

*[学生可能会主张该假设是不合理的。例如：*

*该假设是不合理的，因为在真实世界的情境中可能存在变化，原因包括特定设计、施工错误或长期磨损等因素。]*

2. 问题 2 提出了估算建筑物高度的方法。教师可以使用数学建模框架（Galbraith & Holton，2018）向学生介绍这种方法，如下图所示。



这个问题的重点是透过应用所提供的模型来解决数学问题。

建议答案：

$$\begin{aligned}
 & \text{建筑物的高度} \\
 & = 15.2 \text{ cm} \times 16 \times 17 \\
 & = 4134.4 \text{ cm} \\
 & = 41 \text{ m}
 \end{aligned}$$

3. 教师应强调，这样的计算之所以是可能的，是因为我们已经作出了一些假设。此外，模型方程存在一些局限性。因此，问题 3 的讨论提升学生在进行假设和识别建模局限性方面的能力。以下是一些可能的讨论结果。
- 假设：
    1. 梯级的高度 ( $h$ ) 相等
    2. 垂直的阶梯
    3. 每层楼 ( $k$ ) 的梯级数目 ( $n$ ) 相同
  - 局限性：

这个模型忽略了延伸到楼梯区域之外的部分，例如屋顶或其他建筑组件。
4. 在现实中，我们所计划的方法并不一定可行，这是由于环境的限制，例如无法进入的区域和安全问题。透过问题 4 的讨论，教师可以提高学生在 STEAM 活动中的守规和安全意识。以下是一些可能的讨论结果。
1. 无法进入的区域：在某些情况下，建筑物的某些部分可能是私人区域，无法进行数算和测量梯级。
  2. 安全问题：进入建筑物的楼梯可能存在危险，尤其是在陌生或不安全的环境中。

## 活动 2A (请参阅工作纸 2)

此活动应用三角比来估算高度，且运用数位量角器来测量仰角。这科技的揉合突显了它在解决现实世界问题和数学建模中的重要角色。

### 教学建议：

1. 教师可以回顾学生运用三角比来解与平面图形有关的应用题的先备知识。问题 1 已提供了必要的资料和假设。

建议答案：

$$\begin{aligned}\tan 37.2^\circ &= \frac{BC}{5.63} \\ BC &= 5.63 \tan 37.2^\circ \\ &= 4.27 \text{ m}\end{aligned}$$

2. 与问题 1 相似，问题 2 旨在回顾学生的先备知识。但这问题较进深，因为它考虑了学生的视线高度。我们需要构作一条垂直于树的直线。

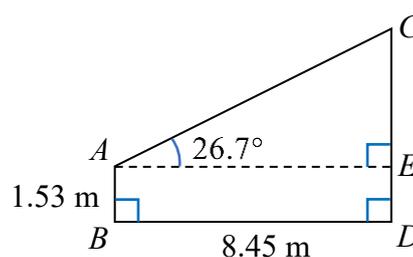
建议答案：

作线  $AE \perp CD$

$$AE = 8.45 \text{ m}$$

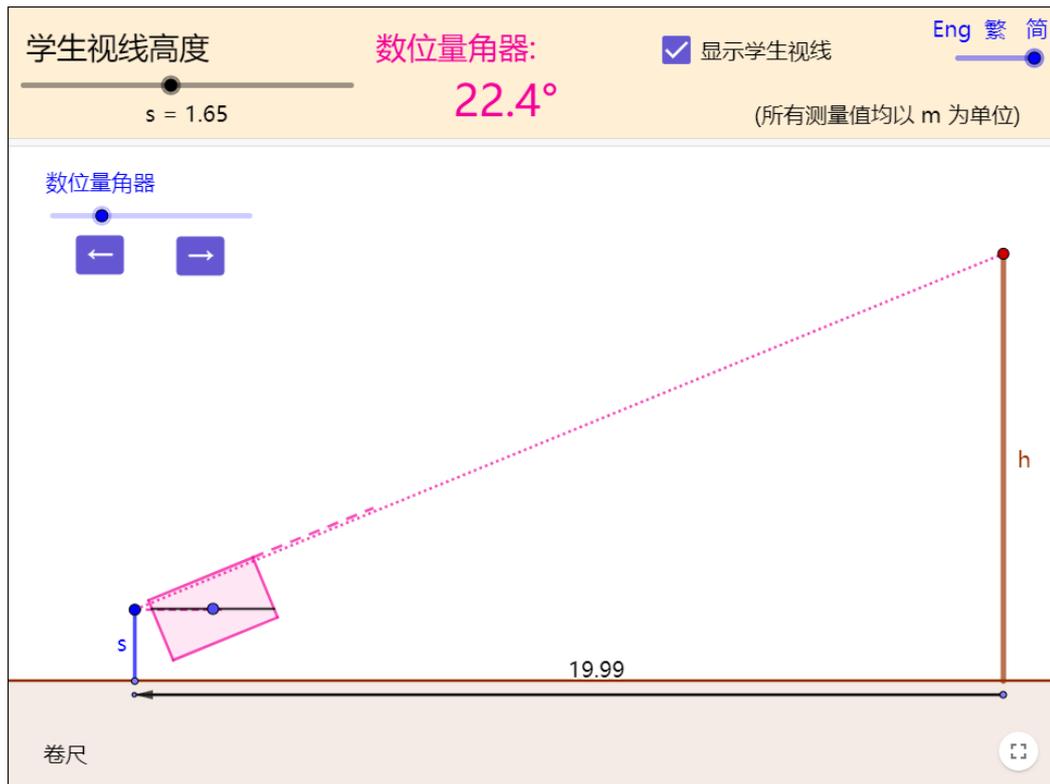
$$\begin{aligned}\tan 26.7^\circ &= \frac{CE}{8.45} \\ CE &= 8.45 \tan 26.7^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CD &= CE + ED \\ &= 8.45 \tan 26.7^\circ + 1.53 \\ &= 5.78 \text{ m}\end{aligned}$$



3. 有了从问题 2 中得到的经验，学生需要 (a) 作出必要的假设，然后 (b) 估算建筑物的高度。这里需要使用卷尺来量度学生视线高度和学生与建筑物之间的水平距离，及数位量角器来测量仰角。

这个小程式 (<https://www.geogebra.org/m/ymen6puf>) 提供了测量的虚拟模拟，使这项活动能够在课室环境中进行。教师还可以运用这个小程式来示范测量的过程。



一组可能的测量值如下：

- 仰角 =  $22.4^\circ$
- 学生视线高度  $s = 1.65 \text{ m}$
- 学生与建筑物之间的水平距离 =  $19.99 \text{ m}$

建议答案：

(a) 假设：

1. 垂直建筑：地面和建筑物之间的角度确切为  $90^\circ$ 。
2. 地面状态：地面平坦，没有凹凸不平之处，因为这可能会影响测量学生与建筑物之间的水平距离的准确性。
3. 地面水平：学生站立的位置和建筑物的基座处于相同的水平。

(b) [基于上述的一组可能测量值]

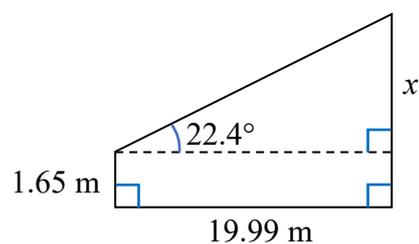
由学生的眼睛，作一条垂直于建筑物的水平线。

设  $x$  为未知数，如图所示。

$$\tan 22.4^\circ = \frac{x}{19.99}$$
$$CE = 19.99 \tan 22.4^\circ$$

$$h = x + 1.65$$
$$= 19.99 \tan 22.4^\circ + 1.65$$
$$= 9.89 \text{ m}$$

$\therefore$  建筑物的高度是 9.89 m。



4. 在活动 2A 的尾声，教师可以带领学生讨论在估算时可能遇到的环境限制。以下是一些可能的讨论结果。
1. 天气情况：恶劣的天气情况（例如浓雾或下雨）可能会遮挡视线，影响测量角度的准确性。
  2. 障碍物：可能会有障碍物阻碍测量学生站立位置和建筑物基座之间的距离。

## 活动 2B (请参阅工作纸 2)

此增润活动扩展三角比在高度估算中的应用，特别是在量度水平距离不完全可行的情况下。

### 教学建议：

- 教师可以利用例子 5 为学生讲解这种方法，其中量度  $CD$  的长度并不可行。
  - 步骤 1：测量地面上两点（即  $A$  和  $D$ ）之间的距离。请注意，这两点和建筑物的基座应该成一条直线（即  $A$ 、 $D$  和  $C$  共线）。
  - 步骤 2：测量从这些点到建筑物顶部的仰角（即  $\angle BAC$  和  $\angle BDC$ ）。
  - 步骤 3：以解联立二元一次方程的知识解决数学问题。
- 学生应用所学来完成即时练习 6。教师可以从而检视他们对这个方法的理解，并相应地提供反馈。

### 建议答案：

设  $BC = h$  m 和  $DC = x$  m。

在  $\triangle BCD$ ，

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$
$$x = \frac{h}{\tan 60^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

在  $\triangle ABC$ ，

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x+9}$$
$$x+9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

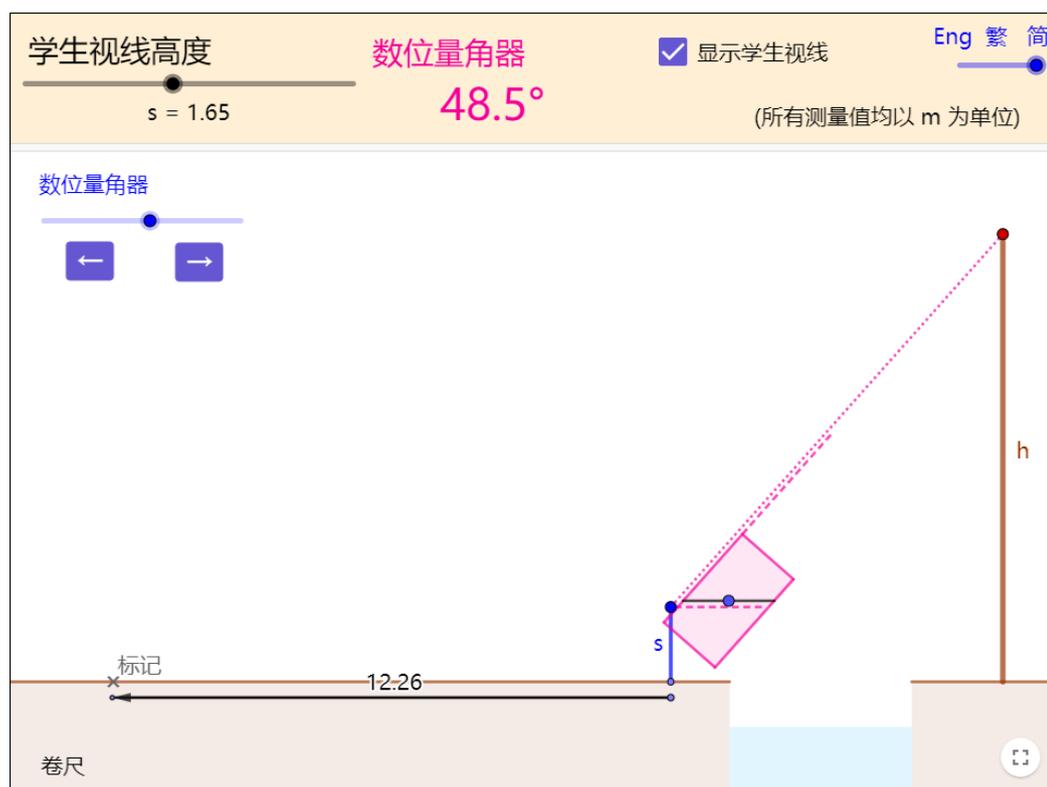
把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 60^\circ} + 9 = \frac{h}{\tan 30^\circ}$$
$$9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ}$$
$$9 = h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right)$$
$$9 \div \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right) = h$$
$$h = 7.79$$

$\therefore BC = 7.79$  m

7. 有了从即时练习 6 中得到的经验，学生需要 (a) 作出必要的假设，然后 (b) 估算建筑物的高度。这里需要使用卷尺来量度学生视线高度和第一与第二个位置之间的水平距离，及数位量角器来测量仰角。

这个小程式（<https://www.geogebra.org/m/djurma4f>）提供了测量的虚拟模拟，使这项活动能够在课室环境中进行。教师还可以运用这个小程式来示范测量的过程。



一组可能的测量值如下：

- 第一个仰角 =  $22.8^\circ$
- 第二个仰角 =  $48.5^\circ$
- 学生的视线高度  $s = 1.65$  m
- 第一与第二个位置之间的水平距离 =  $12.26$  m

建议答案：

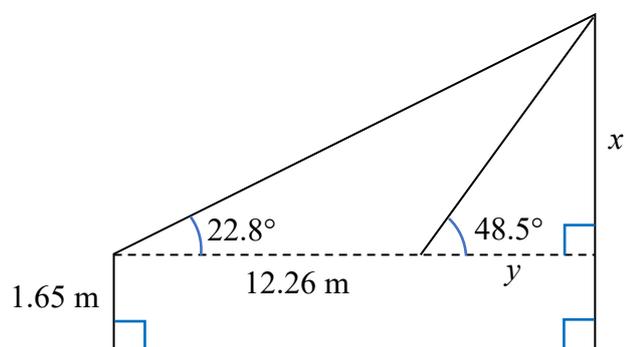
(a) 假设：

地面水平：学生站立的两个位置和建筑物的基座处于相同的水平位置且共线。

(b) [基于上述的一组可能测量值]

由学生的眼睛，作一条垂直于建筑物的水平线。

设  $x$  和  $y$  为未知数，如图所示。



$$\tan 48.5^\circ = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan 48.5^\circ} \dots\dots(1)$$

$$\tan 22.8^\circ = \frac{x}{y + 12.26}$$

$$y + 12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得

$$\frac{x}{\tan 48.5^\circ} + 12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ}$$

$$12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} - \frac{x}{\tan 48.5^\circ}$$

$$12.26 = x \left( \frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ} \right)$$

$$12.26 \div \left( \frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ} \right) = x$$

$$x = 8.205165382$$

$$h = 8.205165382 + 1.65$$

$$= 9.86$$

$\therefore$  建筑物的高度是 9.86 m。

### 活动 3 (请参阅工作纸 3)

在这个活动中，学生将运用 GeoGebra 创建一个建筑物的虚拟 3D 模型。教师可以在课堂内进行此活动，或将其指派为课后任务。

#### **教学建议：**

1. 学生运用线上地图找出建筑物的横向尺寸。教师可以建议他们截取并下载目标建筑物的地图，并包含比例尺。有了这个比例尺，在创建 3D 模型时便能更容易保持正确的比例。
2. <https://www.geogebra.org/classic> 是 GeoGebra 的线上应用程式。教师和学生也可以在电脑上安装 GeoGebra。  
请到：<https://www.geogebra.org/download>
3. 教师可以向学生介绍使用 GeoGebra 创造 3D 模型的资讯科技技巧。教师可以使用工作纸 3 中的步骤，当中以一座高 96 m 的建筑物为示例。
4. 在活动的尾声，教师可以带领学生讨论他讨论我们对这个 3D 模型所作出了的假设。以下是一些可能的讨论结果。
  1. 建筑物形状：建筑物是一个角柱体，在整个高度上具有均匀横切面。
  2. 建筑物顶部：建筑物的屋顶或最顶层是完全平坦的。

## 总结：

整体而言，学生接触了两种不同的高度估算方法，进而创建他们的 3D 虚拟模型。他们还探讨了每种方法当中的假设、局限性和环境限制。

在结束这项活动时，教师可以总结和比较这两种方法。

- 活动 1：透过测量单个台阶的高度和总数来估算建筑物高度是直接的，但可能会受到情境限制，例如无法进入建筑物内部。
- 活动 2：透过仰角和水平距离来估算高度，我们不需进入建筑物内部，但需要其他工具（例如数位量角器）来测量角度。

我们也有其他方法。例如，利用影子长度和相似三角形，我们可以在不进入建筑物内部和不需要数位量角器的情况下估算它的高度，但可能会遇到与天气条件相关的环境限制（例如：下雨或多云阳光不足的日子，将不可能测量影子的长度）。因此，我们应根据实际的情况和可动用的资源来选择适当的估算和建模方法。

## 参考文献：

- Galbraith, P., & Holton, D. (2018). *Mathematical modelling: A guidebook for teachers and teams*. Australia: Australian Council for Educational Research.
- Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

## 建议的教案和教学流程

教学时间：70 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
20	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 引起学生兴趣</li> <li>• 建立对高度估算的背景</li> <li>• 提升学生识别假设的能力</li> <li>• 应用建模结果</li> <li>• 提升学生在建模中认出假设、局限性和环境限制的能力</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教师透过讨论现实情境来引起学生的兴趣。</li> <li>2. 教师透过讨论估算颁奖台的长度和高度的方法来引起学生的兴趣。</li> <li>3. 教师指出问题 1(a) 和问题 1(b) 的不同之处，由此强调在现实世界问题中作出假设的需要。</li> <li>4. 学生分组讨论所作出了的主要假设和判断它是否合理。</li> <li>5. 利用问题 2 中的方法，教师向学生介绍数学建模框架。</li> <li>6. 学生应用所提供的模型来解决问题。</li> <li>7. 学生分组讨论在模型中的假设和局限性。</li> <li>8. 学生分组讨论模型方法的环境限制。</li> </ol>	<p>WS 封面</p> <p>WS1 Q1</p> <p>WS1 Q2</p> <p>WS1 Q3–4</p>
20	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 回顾先备知识</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教师利用例子作为热身练习，让学生回顾运用三角比来解与平面图形有关的应用题的知识。</li> </ol>	WS2A Q1–2

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
	<ul style="list-style-type: none"> <li>使用三角比来估算高度</li> <li>提升学生作出假设的能力</li> <li>提升学生在建模中认出环境限制的能力</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师可以运用小程序来示范测量的过程。</li> <li>学生分组讨论在估算中的必要假设。</li> <li>学生使用卷尺量度一位学生的视线高度、他与建筑物之间的水平距离。他们并使用数位量角器测量从他的眼睛到建筑物顶部的仰角。</li> <li>学生基于他们的测量值来估算建筑物的高度。</li> <li>学生分组讨论在估算时可能遇到的环境限制。</li> </ol>	<p>WS2A Q3</p> <p>WS2A Q4</p>
[20]*	<ul style="list-style-type: none"> <li>使用三角比来估算高度（进深）</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师利用例子和即时练习，介绍当量度水平距离不完全可行时，如何使用三角比来估算高度。</li> <li>教师可以运用小程序来示范测量的过程。</li> <li>学生分组讨论在估算中的必要假设。</li> <li>学生使用卷尺量度一位学生的视线高度、他第一与第二个位置之间的水平距离。他们并使用数位量角器测量从他的眼睛到建筑物顶部的第一和第二个仰角。</li> <li>学生基于他们的测量值来估算建筑物的高度。</li> </ol>	<p>WS2B Q5-6</p> <p>WS2B Q7</p>
25	<ul style="list-style-type: none"> <li>创建 3D 虚拟模型</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>学生运用 GeoGebra 来创建建筑物的虚拟 3D 模型。</li> <li>学生分组讨论在模型中所牵涉的假设。</li> </ol>	<p>WS3 Q1-3</p> <p>WS3 Q4</p>

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>总结活动</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师总结和比较以上两个高度估算的方法。</li> <li>教师强调每个方法的优点和局限性。</li> </ol>	

\* 因应学生的能力和校情，活动 2A 和活动 2B 可以二择其一。